1052. Weil ノ mass ノアル Abel 群ニツイテ

河田　敬義（東京文理大）

Gelfand, Raikov, Krein 等ハ im Kleinen bikompakt ナ Abel 群，或ハヨリ一般ニ廣義ノ Haar-mass（小平[1]参照）ヲモツタ topologische Abelsche Gruppe ニ對シテ，norm 環ト関聯セシメテ Charakter ノ理論ヲ発展サセ，ソレヲ用ヒテ Positiv definit ナ函數ノ Bochner ノ理論ノ拡張，Plancherel ノ定理

ノ擴張ヲ証明シ, Pontrjagin ノ Dualitätssatz ヲ Struktursatz ヲ用ヒズニ証明シテヰル。

此処デハ先ヅ之等ノ議論ガ Haar-Mass ノ代リニ Weil-Mass (小平[1]; §1 参照) デスベテ成立スルコトヲ注意スル。ソレヲ用ヒレバ, Weil-Mass ヲ Haar-Mass ニスル様ナ Topologie ノ定義ガ Charakter ト密接ニ関聯スル. ソシテ Pontrjagin ノ Dualitätssatz ト Banach 空間ノ Regularitätsrelation トガ, 形式上同一ノ容貌ヲ呈スル. (§4)

又 Bochner ノ Positiv definit ナ函数ノ表現ノ理論ノ拡張ハ当然ナガラ Stone ノ定理ノ拡張ヲ許シ、ソレカラ平均エルゴード定理ガ, Weil ノ Mass ノアル Abel 群ヲ Parameter トスル messbar ナ流レニ対シテモ成立スル。(§5) コレハ又 $\mathfrak{G}$ ノ上ノ messbar ナ fastperiodische Funktion ノ平均値ヲ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(E)}\int_{E_n} f(x)\,m(dx) = Mf$ トシテ表スコトト関聯スル. (§5)

脚註

I. Gelfand and D. Raikov, C. R. URSS, 28 (1940), No. 3

D. Raikov [1], 仝 28 (1940), No. 4

M. Krein, 仝 30 (1941), No. 6

D. Raikov [2], 仝 30 (1941), No. 7

小平邦彦 [1], 数物記事 23 (1941), No. 2

仝 人 [2], 學士院記事 17 (1941), No. 2

J. v. Neumann, Trans. A. M. S. 36 (1934), §5

§ 1

$\mathfrak{G}$ ヲ Abel 群，$x, y, \cdots\cdots$ デ其ノ元ヲ表ハス。

$\boxed{\text{定義 1}}$　$\mathfrak{G}$ ノ上デ定義サレタ reguläres äusseres Mass m^* ガ Weil ノ Mass デアルトハ

(i)　$m^*(E+a) = m^*(E)$,

(ii)　$f(x)$ ガ m^*-messbar ナラバ，$f(x-y)$ ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ 上ノ Produkt-äusseresmass $m^*\times m^*$ = 關シテ messbar

(iii)　$\mathfrak{G} = \sum_i^\infty E_n$, $m^*(E_n) < \infty$ トアラハサレル。

(iii) ノ代リニ

(iii')　$A = \mathsf{V}_n A_n$, $B = \mathsf{V}_n B_n$, $m^*(A_n) < \infty$, $m^*(B_n) < \infty$ ナラバ，

$$A - B = \mathsf{V}_n C_n,\ m^*(C_n) < \infty$$ トアラハサレル。

ガ滿足サレルトキニ廣義ノ Weil ノ Mass トイフ。

(注意　(iii') カラ　$-A$, $A+B$ モ同樣ナ性質ヲモツコトガワカル。

$\boxed{\text{定義 2}}$　$\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt ナル時 $\Gamma(\mathfrak{G})$ ヲ $(x; \varphi(x) \neq 0)$ ガ total beschränkt トナルヤウナ連續函數 $f(x)$ ノ全体；$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ヲ $(x; \varphi(x) > 0)$, $\varphi \in \Gamma(\mathfrak{G})$ ヲ含ム最小ノ Borelmengenkörper トス。$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ニ屬ス集合ヲ Borel 集合ト呼ブ。

$\boxed{\text{定義 3}}$　$\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt ナル

時, ソノ上ノ reguläres äusseres Mass m^* ガ Haar ノ Mass デアルトハ定義イ1.ノ(i)ノ他ニ

(IV) Borel 集合ハ m^*-messbar, B ガ total beschränkt ナラ $m^*(E) < \infty$.

(V) 任意ノEニ對シテ, $B \supset E$, $m^*(E) = m^*(B)$ ナル $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ガ存在スル。

H. Cartan ニヨリ Haar ノ Mass ハ常數倍丈ノ違ヒデ一義ニ定マル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ Haar ノ Mass ハ廣義ノ Weil ノ Mass デアル。

(證) (iii)' 丈驗ベル。$m^*(A) < \infty$, $m^*(B) < \infty$ ナラバ m^*ノ定義ヨリ $A = \bigvee A_n$, $B = \bigvee B_n$, A_n, B_n ハ total beschränkt ニナルヤウニエラベル。一方 $A_n - B_m$ ハ total beschränkt; 従ッテ $A - B = \bigvee A_n - B_m$, $m^*(A_n - B_m) < \infty$ トナリ (iii)' ヲ満足スル。

$\boxed{\text{定義 4}}$ μ^* ヲ Ω ノ上デ定義サレタ Caratheodory ノ reguläres äusseres Mass トスル。$\mathfrak{G}$ ヲ広義ノ Weil ノ Mass トスルトキ, $\{T_x\}$, $x \in \mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レデアルトハ

(i) T_x ハ Ω ノ上ノ 1:1 ノ変換デ, $\mu^*(E) = \mu^*(T_x E)$

(ii) $T_x \cdot T_y = T_{x+y}$, $T_0 = I$

(iii) $f(\omega)$ ガ μ^*-messbar ナラバ, $f(T_x \omega)$ ハ $\mathfrak{G} \times \Omega$ ノ上ノ函數トシテ $m^* \times \mu^*$-messbar デアル。

定義1ニ於テハ $T_x y = y - x$ ハ $\mathcal{G}$ ヲ Parameter トスル $\mathcal{G}$ ノ上ノ messbar ナ流レデアル。

$\boxed{\text{定義5}}$ Ω ノ上ノ $\int |f(\omega)|^i \mu(d\omega) < \infty$ ナルfノ全体ヲ $\mathcal{L}_i(\Omega)$ $(i=1,2)$ トカク。

$\boxed{\text{定義6}}$ $\mathcal{G}$ 上デ定義サレタアル Banach 空間ノ値ヲトル函数 $F(x)$ ガ Bochner-messbar トハ，任意ノ $m(E)<\infty$ ナル $E \subset \mathcal{G}$ ノ上デ，殆ンド到ル処単函数（simple function，＝有限箇値函数 endlichwertige Funktion）ノ極限トシテ表ハサレルコトヲイフ。

$\boxed{\text{定理2}}$ $f \in \mathcal{L}_i(\Omega)$ $(i=1,2)$ ニ対シテ，$\{T_x\}$ ガ $\mathcal{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レナラバ，$F_f(x) = f(T_x\omega)$ ハ $\mathcal{G}$ ノ上デ Bochner-messbar デアル。

（証）(i) $f(\omega) = C_E(\omega)$, E: μ-messbar, $\mu(E)<\infty$ ノ場合。

今 $\mathcal{G} \supset A$, $m(A)<\infty$, $E^\circ = \{(x,\omega);\ T_x^{-1}\omega \in E, x \in A\}$ トスレバ，E° ハ $m^* \times \mu^*$-messbar トナル。故ニ適当ナ $E_n = \bigvee_1^{r_n} A_i^{(n)} \times B_i^{(n)}$, $A_i^{(n)} \subset A$, $m(A_i^{(n)})<\infty$, $\mu(B_i^{(n)})<\infty$ ヲトリ，$m\times\mu(E^\circ \sim E_n) \to 0$ ナラシメルコトが出来ル。コヽニ $A \sim B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ トス。即チ $F_n(x) = \sum_1^{r_n} C_{A_i^{(n)}}(x)\cdot C_{B_i^{(n)}}(\omega)$ ハ A ノ上ノ単函数デ，A 上殆ンド到ルトコロ $\|F_f(x) - F_n(x)\| \to 0$ トナル。即チ $F_{C_E}(x)$ ハ Bochner-messbar デアル。

(ii) $f(\omega)$ が単函数ノ場合

(iii) 一般ノ $f \in \mathfrak{L}_i(\Omega)$ ニ對シテ $\|f_n\| < \infty$, $\|f(\omega) - f_n(\omega)\| \to 0$ ($n \to \infty$) ナル單函數ノ列ヲトルコトガ出來ル。T_x ハ Mass ヲカヘナイカラ, $\|F_f(x) - F_{f_n}(x)\| = \|f - f_n\| \to 0$, 即チ F_f ハ Bochner-messbar デアル。

$\boxed{\text{系 1}}$ $\mathfrak{G}$ ガ Weil ノ Mass, 即チ $\mathfrak{G} = \sum_1^\infty A_n$, $m(A_n) < \infty$ ナル時。$[T_x f ; x \in \mathfrak{G}]$ ハ $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{G})$ 中 separabel デアル。

$\boxed{\text{系 2}}$ L ヲ $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{G})$ 上ノ lineare Funktional トスレバ $L(F_f(x))$ ハ x ノ messbar ナ函數デアル。特ニ $\|F_f(x)\|$ ハ messbar.

$\boxed{\text{定義 1}}$ $\chi(y)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ messbar ナ Charakter デアルトハ, $|\chi(y)| = 1$, $\chi(y+z) = \chi(y) \cdot \chi(z)$ ヲ滿足スル messbar ナ函數ヲイフ。χ ノ全体ヲ X トス。

$\boxed{\text{定義 2}}$ $\mathfrak{G}$ 上ノ messbar ナ函數 $\varphi(x)$ ガ positiv definit トハ、

(i) $\text{wes. max}\, |\varphi(x)| < \infty$

(ii) $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$,

(iii) 任意ノ $g(x) \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ニ對シテ

$$\iint \varphi(x-y)\, g(x)\, \overline{g(y)}\, m(dx)\, m(dy) \geqq 0$$

ナルコトヲイフ。

§ 2

$\mathfrak{G}$ ヲ abel 群, m ヲ廣義ノ Weil ノ Mass, $m(x) = 0$,

$m(\mathfrak{g}) = \infty$ トス。

$\mathcal{L}_1(\mathfrak{g}) \ni f$ ニ對シテ

(1) $\|f\| = \int |f(x)|\, m(dx)$

(2) $\mathcal{L}_1(\mathfrak{g}) \ni f, g$ ニ對シテ

$$f \times g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, m(dy)$$

トスレバ，$f \times g \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{g})$ デ

(3) $\|f \times g\| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$

トナル。何トナレバ $A = (x;\ f(x) \neq 0)$，$B = (x;\ g(x) \neq 0)$，$C = A + B$ トスレバ，夫々 Mass 有限ナ集合ノ可算箇ノ和トシテアラハサレルカラ，$C \times B$ デ $f(x-y)\, g(y)$ ニ對シテ Fubini ノ定理ヲ適用スレバヨイ。

$\mathfrak{R} = (\mathfrak{z};\ \mathfrak{z} = \lambda e + f,\ f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{g}))$ トシ

(4) $\|\mathfrak{z}\| = |\lambda| + \|f\|$

(5) $(\lambda_1 e + f_1) \times (\lambda_2 e + f_2) = \lambda_1 \lambda_2 e + (\lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_2 + f_1 \times f_2)$

ニヨリ，e ヲ單位元トスル norm 環ヲ作ル。

$\boxed{\text{定理3}}$ X ヲ χ ニ對シテ

(6) $\varphi_{\mathfrak{z}}(\chi) = \lambda + \int f(y)\, \overline{\chi(y)}\, m(dy)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Ring homomorphismus ヲ與ヘル。$M_{\chi} = (\mathfrak{z};\ \varphi_{\mathfrak{z}}(\chi) = 0)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal トナル。又 $M_0 = (\mathfrak{z};\ \mathfrak{z} = \lambda e)$ モ $\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal ヲナス。

$\boxed{\text{定理4}}$ $\mathfrak{R}$ ノ $M \neq M_0$ ナル Maximales Ideal ニ對シテ $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/M$ デ $\mathfrak{z}$ ニ對應スル値ヲ $(\mathfrak{z}, M)$ トスレバ，$(f, M) \neq 0\ (f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{g}))$ ナル任意ノ f ニ對シテ

(7) $\chi(y) = \dfrac{(F_f(y), M)}{(f, M)}$, $F_f(y) = f(x+y)$

ハ G ノ messbar ナ Charakter トナル。且ツ f ノトリ方ニ無関係デアル。

シカモ $M \neq M_0$ ニ對シテ, $M = M_\chi$ ナル χ ハ一義ニキマル。(6), (7) ハ $M \neq M_0$ ト χ トノ間ノ互ヒニ逆ナ對應トナル。

(注意) (7) ノ $\chi(y)$ が y ニツイテ messbar ナルコトニ定理2, 系2ヲ用フ。

R ノ Maximales Ideal 全体ヲ $\mathfrak{M}$ トスル。$\mathfrak{M}$ ハ bikompakt デ, (z, M) ハ $\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數デアル。特ニ $(f, M_\chi) = \varphi_f(\chi)$, $(f, M_0) = 0$; 故ニ $\varphi_f(\chi)$ ハ M_0 デ 0 トナル $\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數ト見做スコトが出来ル。

X ヲ $\mathfrak{M} - M_0$ ト identifizieren スレバ ($\chi \leftrightarrow M_\chi$) X ハ im Kleinen bikompakt, M_0 ニ對シテ無限遠点 χ_∞ ヲ考ヘレバ $\chi \to \chi_\infty$ デ $\varphi_f(\chi) \to 0$ トナル。且ツ X ノ Topologie ハ $f_i \in \mathfrak{L}_1(G)$ ニヨリ

(8) $U(\chi_0; f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$

$$= \left(\chi; \left|\int f_i(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy) - \int f_i(y)\overline{\chi_0(y)}\, m(dy)\right| < \varepsilon,\right.$$

$$\left. i = 1, \cdots\cdots, n\right)$$

ヲ Umgebungssystem トシテ決定サレル。

$z = \lambda e + f(x)$ ニ對シテ $z^* = \bar{\lambda} e + f^*$, $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ トスルト

(9) $\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{X}) = \overline{\varphi_{\mathfrak{z}^*}(\mathfrak{X})}$

ヲ満足スル。從ッテ $\{\varphi_f(\mathfrak{X});\ f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})\}$ ニヨッテ $g(\mathfrak{X}) \to 0\ (\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_\infty)$ ナル $\mathfrak{X}$ 上ノ連續函數 $g(\mathfrak{X})$ ヲ一樣ニ近似スルコトガ出來ル。

$\boxed{定理5}$ $\mathfrak{X}(y)$ ハ y ヲトメレバ $\mathfrak{X}$ 上ノ連續函數デアル。

(証) $\mathfrak{X} \supset \Xi$ ヲ *total beschränkte offene Menge* トスレバ，近似定理カラ $\varphi_f(\mathfrak{X}) > \frac{1}{2}$，$\mathfrak{X} \in \Xi$ ナル $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ガアル. 故ニ $\mathfrak{X}(y) = \varphi_f(\mathfrak{X})^{-1} \cdot \varphi_{F_f(y)}(\mathfrak{X})$ ハ $\mathfrak{X} \in \Xi$ デ *stetig* デアル。——

$\boxed{定理6}$ $\mathfrak{G}$ ガ *im Kleinen bikompakt*，m ガ Haar ノ測度デアルトキハ，$\mathfrak{X}(y)$ ハ $\mathfrak{G} \times \mathfrak{X}$ 上デ連續，且ツ (8) ノ Topologie ハ $\mathfrak{G} \supset A$：*bikompakte Menge* デ

(9) $U(\mathfrak{X}_0; A, \varepsilon) = (\mathfrak{X};\ |\mathfrak{X}(y) - \mathfrak{X}_0(y)| < \varepsilon,\ y \in A)$

デ與ヘラレル *Umgebungssystem äquivalent* デアル。

(証) (8) ガ (9) ヨリ弱イコトハ容易デアルガ，逆ノ方ハ定理5ノ証明デワカル樣ニ $\mathfrak{X}(y)$ ガ $\mathfrak{G} \times \mathfrak{X}$ デ *stetig* ナルコトカラ導クコトガ出來ル。

今度ハ m ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ Mass トスル。$\mathfrak{M}$ ノ上ノ連續函數全体ノ作ル C－空間ヲ $C(\mathfrak{M})$ トスル。$\mathfrak{R} \ni \mathfrak{z}$ カラ $(\mathfrak{z}, M)$，$M \in \mathfrak{M}$ ヲ作レバ $C(\mathfrak{M})$ ニ屬ス。$(\mathfrak{z}, M)$ ハ $C(\mathfrak{M})$ 中 *dicht* デアッタ。

$\boxed{\text{定理7}}$ $\varphi(x)$ ヲ $\mathfrak{G}$ 上ノ positiv definit ナル函数トスル。且ツ wes. $\max|\varphi|=1$ トス。

(10) $\quad \mathrm{L}(\mathfrak{z})=\lambda+\int\varphi(x)f(x)\,m(dx)$

ハ $C(\mathfrak{M})$ 全体ニ拡大サレテ（一義ニ），ソコデ positiv linear デアル：

1) $\quad \mathrm{L}(\psi(M))\geqq 0$ für $\psi(M)\geqq 0$, $\psi(M)\in C(\mathfrak{M})$

2) $\quad |\mathrm{L}(\psi(M))|\leqq\|\mathrm{L}\|\cdot\max|\psi(M)|$, $\|\mathrm{L}\|=1$

3) $\quad \mathrm{L}(\mathfrak{z}^*)=\overline{\mathrm{L}(\mathfrak{z})}$.

（証） Raikov, [1] 参照． 其処デ total beschränkte offene Menge U ヲ用ヒテオルトコロデハ $U=U(0;f_1\text{------}f_n,\varepsilon)=(y;\ \|F_{f_i}(y)-F_{f_i}(0)\|<\varepsilon$, $i=1,\text{-----},n)$ ヲ用ヒレバ，$\infty>m(U)>0$ デ，且ツ求ムル役ニ間ニ合フ。

（小平：105頁参照）之レニハ定理2，系1ヲ用ヒル。ソレニハ m ガ (iii)$'$ デナク (iii) デアルコトガ必要ノ様デアル。——

$\boxed{\text{定理8}}$ m ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ Mass トスル。$\varphi(x)$ ガ positiv definit ナラバ，適當ナ $\mathfrak{L}(X)$ 上ノ Lebesgue-Mass μ_φ ニヨリ

(11) $\quad \varphi(x)=\int_X \chi(x)\,\mu_\varphi(d\chi)$

ガ $\mathfrak{G}$ 上殆ンド到ル処成立スル，且ツカヽル μ_φ ハ只一通リシカナイ。$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{L}(X)$-messbar トハ限ラナイガ，μ ヨリ作ッタ X 上ノ äusseres Mass μ^* ニ對シテ μ^*-mess-

bar デアル。

(証) mガ *separabel im Kleinen kompakt* ナ $\mathfrak{G}$ ノ *Haar-Mass* デナイトキハ注意ヲ要スル。ココデ only 可算ニ証明シヨウ。$\Gamma(X) \ni \psi(x)$ ニ対シテ定理7ノ $L(\psi)$ ガ *positiv linear*, $\|L\| = 1$ カラ

$$(12) \quad L(\psi) = \int_X \psi(x)\mu(dx), \quad \psi \in \Gamma(X)$$

ナル $\mathfrak{L}(X)$ ノ上ノ *Lebesgue-Mass* μ ガ存在シテ一義ニ定マル。ココニ $\mu(E) \geqq 0$, $\mu(X) = 1$

$\boxed{\text{補題2}}$ μ カラ X 上 *reguläres äusseres Mass* μ^* ヲ定義スルト *messbar* ナ *Charakter* $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G} \times X$ 上 $m^* \times \mu^*$-*messbar* デアル。

之レヲ用ヒルト，任意ノ $f(y) \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ニ對シテ $f(y)\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G} \times X$ ノ上デ $m^* \times \mu$-*messbar* デアルカラ，*Fubini* ノ定理ニヨッテ

$$\iint f(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy)\mu(dx)$$

$$= \int\left(\int f(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy)\right)\mu(dx)$$

即チ $\varphi_f(x)$ ハ μ^*-*messbar* デ，$\int \varphi_f(x)\mu(dx)$ ガ存在スル．次ニ一般ニ

$$(13) \quad L(\varphi_f) = \int \varphi_f(x)\mu(dx)$$

ヲ証明スル。先ヅ $x \to x_\infty$ ナラバ $\varphi_f(x) \to 0$ ヨリ $X \supset \Xi$: *bikompakt*, $|\varphi_f(x)| < \varepsilon$ für $x \notin \Xi = \Xi$

ヲ選ブ。次ニ $\psi_{\Xi}(\chi) \in \Gamma(\chi)$ ヲ $0 \leqq \psi_{\Xi}(\chi) \leqq 1$,

$\psi_{\Xi}(\chi) = 1$ für $\chi \in \Xi$ ナル如ク選ブ. 一方デハ

$|\varphi_f(\chi) - \varphi_f(\chi) \cdot \psi_{\Xi}(\chi)| < \varepsilon$ カラ $|L(\varphi_f - \varphi_f \psi_{\Xi})|$

$< \|L\| \cdot \varepsilon = \varepsilon$, 他方デハ

$$\left| \int \varphi_f - \varphi_f \psi_{\Xi} \mu(d\chi) \right| \leqq \varepsilon \cdot \mu(X) = \varepsilon.$$

此処デ $\varepsilon \to 0$ トスレバ (12) カラ (13) ヲ得ル。サテ Fubini

ノ定理カラ

$$\int \varphi(x) f(x) m(dx) = L(\varphi_f)$$

$$= \int \left(\int f(y) \overline{\chi(y)} m(dy) \right) \mu(d\chi)$$

$$= \int \left(\int \overline{\chi(y)} \mu(d\chi) \right) f(y) m(dy)$$

$f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{G})$ ハ勝手デアッタ。故ニ $\mathfrak{G}$ 上殆ンド到ル処 (11) ガ

成立スル。但シ $\mu_g(E) = \mu(-E)$ トス, 此処デ

補題ノ証明. $\Xi = (\chi ; \varphi_f(\chi) \neq 0)$ トスレバ,

$\chi(y) = (\varphi_f(x))^{-1} \varphi_{F_f(y)}(\chi)$ カラ, 定理2, 系2ニヨリ

$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G} \times \Xi$ 上 χ ニ對シテ連續, y ニ関シテ m^*-messbar

デアル. 今 $X \supset \Xi_n$: bikompakt,

$|\varphi_f(\chi)| < \frac{1}{n}$ für $\chi \neq \Xi_n$ トシ, 上ノ如ク $\Gamma(X) \ni \psi_{\Xi_n}$ ヲ

選ベバ, $|\varphi_{F_f(y)}(\chi)| = |\varphi_f(\chi)|$ デアルカラ

$|\varphi_{F_f(y)}(\chi) - \varphi_{F_f(y)}(\chi) \psi_{\Xi_n}(\chi)| \to 0 \ (n \to \infty)$,

$\varphi_{F_f(y)}(x)\psi_{\Xi_n}(x)\in\Gamma(X)$ トナル。一方 $\varphi_{F_f(y)}(x)\cdot\psi_{\Xi_n}(x)$ ハ $\mathfrak{Y}\times X$ 上 $m^*\times\mu^*$-messbar デアルカラ，ソノ極限トシテ $\varphi_{F_f(y)}(x)$，即チ $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{Y}\times\Xi$ 上 $m^*\times\mu^*$-messbar デアル。

$\mu(X)=1$ ヨリ $X\supset A=\sum_1^\infty \Xi_n$, Ξ_n: *bikompakt*, $\mu(X-A)=0$ ナル A ガ存在スル。

各 Ξ_n ニ對シテ $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{Y})\ni f_n$ ヲシテ

$1\geqq\varphi_{f_n}(x)\geqq 0$, $\varphi_{f_n}(x)>\frac{1}{2}$ für $x\in\Xi_n$ ニ f_n ヲ選ブ。$\sum\alpha_n\|f_n\|<\infty$, $\alpha_n>0$ ニ α_n ヲトッテ

$f=\sum_1^\infty\alpha_n f_n\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{Y})$ トスレバ，$\varphi_f(x)>0$ für $x\in A$ トナル。ヨッテ $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{Y}\times A$ 上，即チ $\mathfrak{Y}\times X$ 上 $m^*\times\mu^*$-messbar トナル。——

補題カラ Fubini ノ定理ニヨッテ殆ンドスベテノ y ニ對シテ $\chi(y)$ ハ μ^*-messbar デアル。一方定理5ノ證明ヨリ $\|F_f(x)-F_f(y)\|>2|\chi(x)-\chi(y)|$ für $\chi\in\Xi$ トナルコトカラ，$m(x;\|F_f(x)-F_f(y)\|<\varepsilon)>0$ ニヨリ，カヽル除外ハ実際ハ存在シナイコトガ分ル。

§3

次ノ§ヘノ準備トシテ，X ヲ一般ニ *abstrakter Raum*，$\mathfrak{L}(X)$ ヲ一ツノ *Borel-mengenkörper* トスル。$\mathfrak{H}$ ヲ或ル Hilbert 空間トス。

$\boxed{定義9}$ $\mathcal{L}(X)$ 上ノ Massoperator $\{P(E)\}$ トハ、$\mathfrak{H}_y$ ノ上ノ Projektionsoperator ノ集リデ

(i) $P(X)=I$

(ii) $\mathcal{L}(X) \ni E_i,\ E_1 \cdot E_2 = 0$ ナラバ $P(E_1)\cdot P(E_2)=0$,

$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$

(iii) $\mathcal{L}(X) \ni E_n,\ E_1 \subset E_2 \subset \cdots\cdots,\ \lim E_n = E_0$ ナラバ、$\lim P(E_n)=P(E_0)$

ヲ満足スルヲイフ。

任意ノ $f \in \mathfrak{H}_y$ ニ對シテ

(14) $m_f(E)=\|P(E)f\|^2,\quad E \in \mathcal{L}(X)$

ハ普通ノ Lebesgue-mass トナル。

今 $\psi(x)$ ヲ X 上ノ $\mathcal{L}(X)$-messbar ナ函數、又ハ一般ニ m_f^*-messbar デアレバ

$$(15)\qquad g=\int \psi(x)\, dP(E) f$$

ヲ次ノ様ニ定義サレル。$\Delta=(E_1,\cdots\cdots,E_n)$, $E_i \cdot E_j = 0$ $(i \neq j)$, $X=E_1+\cdots\cdots+E_n$ ニ對シテ $\mathrm{Osc}(\psi,E_i)=\overline{\mathrm{Fin}}_{x,y\in E_i} |\psi(x)-\psi(y)|$, $\sum \mathrm{Osc}(\psi,E_i)\cdot\|P(E)f\|^2<\varepsilon$ ナル Δ が存在スル, ヨッテ $\varepsilon \to 0$ ニ對シテ細カル次々ノ Verfeinereng Δ_n ヲトレバ

$$\lim_{(\mathrm{stark})} \sum_{1}^{r_n} \psi(x_i) P(E_i^{(n)}) f = g.$$

$$\Delta_n=(E_1^{(n)},\cdots\cdots,E_{r_n}^{(n)})$$

が成立スル。コノ g ヲ (15) ノ g ト定義スル。

定理 9

(i) $\left\| \int \psi(x)\, dP(E) f \right\|^2 = \int |\psi(x)|^2 d\| P(E) f \|^2$

(ii) $\left(\int \psi(x)\, dP(E) f, g \right) = \int \psi(x)\, d(P(E) f, g)$

(iii) $\int \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x)\, dP(E) f$

$= \alpha_1 \int \psi_1(x)\, dP(E) f + \alpha_2 \int \psi_2(x)\, dP(E) f$

(iv) $|\psi_n(x)| < C$, $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$, $\lim \psi_n(x) = \psi(x)$

ガ m_f - fast überall ナラバ

$\lim_{\text{stark}} \int \psi_n(x)\, dP(E) f = \int \psi(x)\, dP(E) f$

次ニ Y ノ上デ $\mathfrak{L}(Y)$ ナル Borel-mengenkörper ト，Y ノ上ノ Lebesgue-mass μ, $\mu(Y) < \infty$ トが與ヘラレテヰルモノトスル。

補題 2 有界ナ $\psi(x, y)$ ガ $X \times Y$ 上任意ノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $m_f^* \times \mu^*$ - messbar ナラバ，

$\int \psi(x, y)\, dP(E) f = F(y) \in \mathfrak{H}$ ハ $\mathfrak{L}(Y)$ ニ關シテ Bochner-messbar デアル。

(證) (i) $\psi(x, y) = C_E(x, y)$, $E : m_f^* \mu^*$ - messbar ナ場合.

$E_n = \sum_1^{r_n} A_i^{(n)} \times B_i^{(n)}$, $A_i^{(n)} \in \mathfrak{L}(X)$; $B_i^{(n)} \in \mathfrak{L}(Y)$,

$m_f^* \times \mu^* (E \sim E_n) \to 0$

トスレバ

$$\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f=\sum_1^{r_n} C_{B_i^{(n)}}(y)\cdot P(A_i^{(n)})\,f\ ハ$$

単函数，従ッテ

$$\left\|\int C_E(x,y)\,dP(E)f-\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f\right\|^2$$

$$=\int |C_E(x,y)-C_{E_n}(x,y)|^2\,d\|P(E)\|^2=m_f^*\ (x;$$

$E\sim E_n$ ヲ $(x,y))\to 0$（Y上殆ンド到ル処）．即チ

$\int C_E(x,y)\,dP(E)f$ ハ Y上 $B(Y)$-Bochner-messbar

デアル。

(ii) $\psi(x,y)$ が単函数ノ場合

(iii) 一般ノ場合．$|\psi(x,y)-\psi_n(x,y)|<\frac{1}{n}$，$\psi_n$：単函数トスル。

$$\left\|\int\psi(x,y)\,dP(E)f-\int\psi_n\,dP(E)f\right\|^2$$

$$=\int|\psi-\psi_n|\,dm_f(E)\to 0$$ ヨリ $\int\psi(x,y)\,dP(E)f$ ハ

$\mathfrak{L}(Y)$-Bochner-messbar デアル。

$\boxed{\text{定理 10}}$ $\psi(x,y)$ が有界，且ッ $m_f^*\times\mu^*$-messbar ナラバ

$$\int\left(\int\psi(x,y)\,\mu(dy)\right)dP(E)f$$

$$=\int\left(\int\psi(x,y)\,dP(E)f\right)\mu(dy)$$

(證) 右辺ガ意味ノアルコトハ補題2ト

$\|\int\psi\, dP(E)f\|^2 \leqq \overline{\mathrm{fin}}\,\psi^2\cdot\|f\|^2$ ヨリ.

(i) $\psi(x,y)=C_E(x,y)$, Eガ $m_f^*\times\mu^*$-messbar ナ場合.

上ノ如ク E_n ヲトル. 定理中 $\psi=C_{E_n}(x,y)$ トスレバ

$$左辺=\int\sum_1^{r_n} C_{A_i^{(n)}}(x)\cdot\mu^*(B_i^{(n)})=\sum_1^{r_n}\mu^*(B_i^{(n)})\cdot P(A_i^{(n)})f$$

=右辺デアル. $n\to\infty$ トスレバ

$$\|\int\left(\int C_E(x,y)\mu(dy)\right)dP(E)f$$

$$-\int\left(\int C_{E_n}(x,y)\mu(dy)\right)dP(E)f\|^2$$

$$=\int\mu^{*2}(y;E\sim E_n\ni(x;y))\,d\|P(E)f\|^2\to 0,$$ 及ビ

$$\|\int\left(\int C_E(x,y)\,dP(E)f\right)\mu(dy)$$

$$-\int\left(\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f\right)\mu(dy)\|$$

$$\leqq\int m_f^{*\frac{1}{2}}(x;E\sim E_n\ni(x,y))\,\mu(dy)\longrightarrow 0$$ ヨリ定理ヲ得

(ii) 單函數ノ場合.

(iii) 一般ノ場合

サテ $\mathfrak{G}$ ヲ Weil, mass m^* ヲモツ abel 群, $\{T_x\}$ ヲ (Ω,μ) ノ上ノ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レトスル. $\mathfrak{H}=\mathfrak{L}_2(\Omega)$ トス.

$\boxed{定理 11}$ $f\in\mathfrak{H}$ ニ對シテ $U_xf=f(T_x\omega)$ トオケ

バ，$\mathfrak{G}$ ノ Charakterengruppe X ノ Borel 集合ノ全体 $\mathfrak{B}(X)$ 上ノアル Massoperator $P(E)$ ニヨッテ

$$U_y f = \int \chi(y)\, dP(E)\, f, \quad f \in \mathfrak{h}_y$$

トアラハサレル。

(証) Hopf, Ergodentheorie 19 頁ト全ク同様ニ定理 8 ヲ用ヒテ或ル $\mathfrak{B}(X)$ 上ノ Massoperator $P(E)$ ニヨリ

$$(16) \quad \left(U_y f, g\right) = \int \chi(y)\, d\left(P(E) f, g\right), \quad f, g \in \mathfrak{h}_y$$

ト表ハサレル。但シ f, g ニ對シテ m^*－Mass 0 ノ y-Menge ヲ除イテ。實際カヽル除外ノナイコトハ，定理 2 系ノニヨリ Hopf， 頁ト同様（小平 [2] 參照） 之レカラ定理 (9), (11) ニヨリ (16) ヲ得ル。

§ 4

今度ハ $\mathfrak{G}$ ヲ Weil ノ Mass m ヲモツ abel 群トシ $U_x f$, $f \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ ヲ $U_x f(y) = F_f(y) = f(x+y)$ トスル。コレハ $T_y x = x+y$ ヲ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル $\mathfrak{G}$ ノ上ノ messbar ナ流レト見タノデアルカラ，定理 11 ハ成立スル。之ヨリ

$\boxed{\text{定理 12}}$ (v. Neumann). $U_x = I$ トナル x ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ，$\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Untergruppe デアル。$x \neq y\ (\mathfrak{N})$ ナルタメノ必要十分條件ハ $\chi(x) \neq \chi(y)$ ナ

ル messbar ナ Charakter ノ存在スルコトデアル。

サテ $\mathfrak{G}$ ノ Charakterengruppe X ハ im Kleinen bikompakte gruppe デアルカラ Haar-mass μ ヲモチ，従ツテ §2 ノ結果が成立スル。$y(\chi) = \chi(y)$, $y \in \mathfrak{G}$ ハ X ノ Charakter トモナルが，補題 2 ト同様ニ X ノ上ノ μ^*-messbar デアル。ヨツテ X ノ messbar ナ Charakter ノ全体ヲ $\overline{\mathfrak{G}}$ トスレバ，$\overline{\mathfrak{G}} \supset \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ト考ヘラレル。$\overline{\mathfrak{G}}$ ノ Topologie カラ induzieren サレル Topologie ハ

$$(\mathrm{i})\quad U_1(x;\, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon) \quad (f_1, \cdots\cdots, f_n \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{X}))$$
$$= \Big(y;\, \Big|\int f_i(\chi)\,\overline{x(\chi)}\,\mu(d\chi) - \int f_i(\chi)\,\overline{y(\chi)}\,\mu(d\chi)\Big| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots\cdots\Big)$$

又ハ

$$(\mathrm{ii})\quad U_2(x;\, \Xi, \varepsilon) \quad (\mathrm{X} \supset \Xi : \text{bikompakt})$$
$$= \big(y;\ |y(\chi) - x(\chi)| < \varepsilon,\ \chi \in \Xi\big)$$

デ与ヘラレル。ソノ他ニ m が $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ mass デアルカラ Weil-小平ノ Topologie が

$$(\mathrm{iii})\quad U_3(x;\, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon) \quad (f_1, \cdots\cdots, f_n \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G}))$$
$$= \Big(y;\ \int |f_i(x+z) - f_i(y+z)|^2\, m(dz) < \varepsilon,\ i = 1, \cdots\cdots, n\Big)$$

ガアル。

$\boxed{\text{定理13}}$ (i), (ii), (iii) ノ三ツノ $\mathfrak{G}$ ノ Umgebungssystem ハ互ニ äquivalent デアル。

(証) (i), (ii) ノ äquivalent ナルコトハ定理 6 ヨリ。

(ii) ト (iii) ノ äq. ナルコトノ証明。

今 $U_3(x; f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$ ガ與ヘラレタトスレバ, 各 f_i ニ對シテ $X \supset \Xi_i$: bikompakt デ $\|P(\Xi_i^c)f_i\|^2 < \varepsilon_1$ $(i=1, \cdots\cdots, n)$ ナラシメ, $\Xi = \Xi_1 \cup \cdots\cdots \cup \Xi_n$ トスル。

今 $y \in U_2(x; \Xi, \varepsilon_2)$ ヲトレバ $U_x f = \int \chi(x)\, dP(E) f$ ニヨッテ

$$\|U_x f_i - U_y f_i\|^2$$

$$\leqq \int_{\Xi} |\chi(x) - \chi(y)|^2 d\|P(E) f_i\|^2 + 2\|P(\Xi^c) f_i\|^2$$

$$\leqq \varepsilon_2^2 \|f_i\|^2 + 2\varepsilon_1$$

ヨッテ $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$, $\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon}{3}(\|f_1\|^2 + \cdots\cdots + \|f_n\|^2)$ トスレバ

$$U_2(x; \Xi, \varepsilon_2) \subset U_3(x; f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$$

トナル。

逆ニ $U_2(x; \Xi, \varepsilon)$ ヲ與ヘルト定理 5 ノ証明ニヨリ $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ヲ適當ニトレバ

$$|\chi(y) - \chi(x)| \leqq \frac{1}{2}\int |f(x+z) - f(z+y)|\, m(dx), \quad \chi \in \Xi$$

ナラシメルコトガ出来ル。更ニソノ f ヲ

$$\int |f(x) - f_0(x)|\, m(dx) < \frac{1}{4}, \quad f_0 \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G}).$$

且ツ $(x; f_0(x) \neq 0) = E$ ガ $m(E) < \infty$ ナル様ニトレバ

$$|\chi(y)-\chi(x)| \leqq \frac{1}{4}\int |f_0(x+z)-f_0(y+z)|\, m(dz)$$

$$\leqq \frac{1}{4}\left\{\int |f_0(x+z)-f_0(y+z)|^2 m(dz)\right\}^{\frac{1}{2}},\ \chi(2m(E))^{\frac{1}{2}},$$

$\chi \in \Xi$

ヨッテ $\varepsilon_1 \times \frac{(2m(E))^{\frac{1}{2}}}{4} < \varepsilon$ ニトレバ

$U_3(x;\ f_0, \varepsilon_1) \subset U_2(x;\ \Xi, \varepsilon)$ トナル. q. e. d.

系 (v. Neumann). $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ ガ separabel ナラバ, U_3 ノ Topologie デ $\mathfrak{G}$ ハ separabel デ $x_n \to x$ ナルタメノ必要十分條件ハ各 $\chi \in X$ ニ對シテ $\chi(x_n) \to \chi(x)$ ナルコトデアル.

Krein [1] ノ Plancherel ノ定理ヲ用ヒタ Raikov [2] ノ結果ニヨレバ, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ 中 überall dicht. 即 Weil-小平ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ im Kleinen bikompakte Gruppe ヘノ Einbettung ハ定理 13 ニヨリ X ノ messbare Charakter ノ群 $\overline{\mathfrak{G}}$ ヘノ Einbettung ニ他ナラナイ. Weil ノ Mass ヲ Haar-Mass ニスル Topologie ガ messbare Charakter ニヨリ (i) 又ハ (ii) ノ形デアラハサレルコトハ, Banach 空間ノ regulär ナルコトヽ比ベテ見ルト面白イ.

(i) $\mathfrak{L}$: Banach 空間: $f, g, \cdots$	(I) $\mathfrak{G}$: Gruppe: $x, y, \cdots$
(ii) Norm $\|f\|$	(II) Weil ノ Mass $m^*(E)$
(iii) lineare Funktional L	(III) mess bar Charakter χ

(iv) konjugierter Raum $\bar{\mathfrak{L}}$.

(v) $\mathfrak{L}$ノ konj. Raum $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$

(vi) schwache Topologie von $\mathfrak{L}$,

(vii) $\mathfrak{L}=\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ ナルタメノ條件ハ $\mathfrak{L}$ノ單位球ガ schwache Topologie デ bikompakt

(viii) $\mathfrak{L}$ガ separabel ナラバ $\mathfrak{L}=\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ ナルタメノ條件ハ$\mathfrak{L}$ノ單位球ガ schwache kompakt ナルコト。

(iv) Charakterengruppe X

(v) Xノ char. gr. $\bar{\mathfrak{G}}$

(vi) $\mathfrak{G}$ノ Topologie (i)(ii)

(vii) $\bar{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ナルタメノ條件ハ (i)(ii)ノ Topologie デ im Klein bikompakt.

(viii) $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ ガ separabel ナラバ $\bar{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ナルタメノ條件ハ $\{\chi(x_n)\}$ ガ各 $\chi\in X$ デ基本列ナラバ $\chi(x_n)\to\chi(x)$ ナル $x\in\mathfrak{G}$ノ存在スルコト。

§5

定理14 m ヲ $\mathfrak{G}$ノ上ノ invariant ナ Mass m トスル。今アル m-messbar ナ集合 $E_1\subset E_2\subset$ -----, $m(E_n)<\infty$ ヲ適當ニトレバ, 任意ノ $\mathfrak{G}$ ノ a ニ對シテ

$$\text{(17)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(E_n)}\,m\big(E_n\sim(E_n+a)\big)=0$$

デアッタトスル。然ラバ任意ノ $\mathfrak{G}$ノ上ノ messbar ナ fast periodische Funktion $f(x)$ ニ對シテ

(18) $$Mf = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f(x)\, m(dx)$$

トナル。

(証) Mf ノ定義ヨリ, 任意ノ ε ニ對シテ $\mathfrak{G} \ni a_i, \alpha_i > 0$ ($i = 1, \cdots\cdots, n$) $\sum \alpha_i = 1$ ヲ適當ニトレバ

$$\left| Mf - \sum_1^n \alpha_i f(x - a_i) \right| < \varepsilon_1, \quad x \in \mathfrak{G}$$

ナラシメルコトが出來ル。故ニ

$$\left| \frac{1}{m(E)} \int_E \sum \alpha_i f(x - a_i)\, m(dx) - Mf \right| < \varepsilon_1$$

一方 $$\left| \frac{1}{m(E)} \left\{ \int_E f(x)\, m(dx) - \int_E \sum \alpha_i f(x - a_i)\, m(dx) \right\} \right|$$

$$= \frac{1}{m(E)} \sum_1^n \alpha_i \left| \int_{E \sim (E + a_i)} f(x)\, m(dx) \right|$$

$$\leqq Max |f(x)| \cdot \frac{1}{m(E)} \sum_1^n \alpha_i\, m(E \sim (E + a_i))$$

ヨッテ (17) ノ假定ヨリ $n \geqq n_0$ ナラバ $\frac{1}{m(E_n)} m(E_n \sim (E_n + a_i)) < \varepsilon_2$ ($i = 1, \cdots\cdots, n$) トスレバ, 上ノ二ツノ式ヲ合セテ

$$\left| Mf - \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f(x)\, m(dx) \right| \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2\, Max |f(x)|,$$

$n \geqq n_0$ トナル故。故 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2\, Max |f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ トスレバ, (18) が証明サレル。

定理 15

(17) ノ假定ノモトニ, m が $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ mass デアレバ $f \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$

$$(19)\quad \lim_{(\text{stark})} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f\, m(dx) = f_0$$

$$U_x f_0 = f_0 \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{G})$$

ナル f_0 ガ存在スル。コヽニ $U_x f(y) = f(x+y)$ トス。

コレハ定義4ノ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レ $\{T_x\}$, $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, $U_x f = f(T_x \omega)$ ニ對シテモ同様。

(証明) 定理10, 11 トカラ

$$\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f\, m(dx) = \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \int_X \chi(y)\, dP(E) f \cdot m(dy)$$

$$= \int \left(\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \chi(y)\, m(dy) \right) dP(E) f$$

トナル。$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ messbar ナ fast periodische Funktion デアルカラ, (17) ノ假定ノモトニ

$$\lim \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \chi(y) m(dy) = M\chi = \begin{cases} 1 & \chi = \chi_0 = \text{Hauptcharakter} \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

故ニ定理9, (iv) ヨリ $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \chi = \chi_0 \\ 0 & x \neq \chi_0 \end{cases}$ トスレバ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f\, m(dx) = \int_X \delta(\chi)\, dP(E) f$$

$$= P(0) f = f_0$$

トナル。 q. e. d.

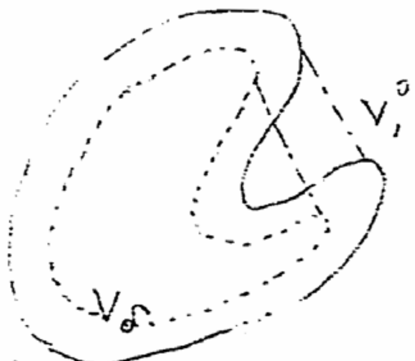
$\boxed{\text{定理 16}}$ $\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt 且ツ zusammenhängend デ m ガソノ Haar-

Inass デアルモノトスル。

G ヲ 0 ヲ含ム任意ノ $\mathfrak{G}$ ノ *total beschränkt* ナ *offene Menge* トスレバ $E_n = G^n = (x_1 + \cdots\cdots + x_n;\ x_i \in G,\ i = 1, \cdots\cdots, n)$ ニ對シテ (17) ガ成立スル。從ッテ (18), (19) モ $E_n = G^n$ ニ對シテ成立スル。

（證）*Pontrjagin* ノ *Struktursatz* ニヨリ $\mathfrak{G} = \mathfrak{T}_r + \mathfrak{K}$ ト rー次元ユークリッド空間ノ *Translationsgruppe* ト, *zusammenhängend* ナ *bikompakte Gruppe* $\mathfrak{K}$ トノ直和ニ分解サレル。ヨッテ $G \supset G_1 + G_2,\ G_1 \subset \mathfrak{T}_r,\ G_2 \subset \mathfrak{K}$ ナル 0 ヲ含ム *offene Menge* ノ直和集合ヲ含ム。一方 $\sum_1^\infty G_2^n = \mathfrak{K}$ カラ, $\mathfrak{K}$ ハ *bikompakt* ナル故, アル n_0 ニ對シテ $G_2^{n_0} = \mathfrak{K}$ トナル。

ヨッテ $n \geqq n_0$ ハ mod $\mathfrak{K}$ ノ *Restklasse* ノ集リトナル。今 V ヲ G ノ $\mathfrak{T}_r$ ヘノ正射影トスル。十分小サイ



$\delta > 0$ ニ對シテ V_δ ヲ δ-*Umgebung* ガスベテ V ニ屬スヤウナ V ノ部分集合トスル。V^0 及 V_δ^0 デ夫々 V 及ビ V_δ ノ *convexe Hülle* ヲアラハス。

$\frac{V^n}{n} = (\mathfrak{y};\ n\mathfrak{y} \in V^n)$ トスレバ, $n > n_0$ ナラバ $\frac{V^n}{n} \supset V_\delta^0$ ナルコトガ證明サレル。

何トナレバ $V_\delta^0 \ni \mathfrak{y}_0 = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b},\ \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1.$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V_\delta$. 故ニ V ト V_δ トノ関係カラ適当ナル $n_0(\delta)$ ニ對シテ, $n > n_0(\delta)$ ナラバ $\gamma_0 = \frac{a}{n}\mathfrak{a}_0 + \frac{b}{n} b_0$, $\mathfrak{a}_0, b_0 \in V$, a, b: 整數 $a + b = n$ トナル様ニ出来ル。

即チ $a\mathfrak{a}_0 + b b_0 \in V^n$ カラ, $V^n/n \supset V^0_\delta$ トナッタ。同様ニ $\frac{V^n}{n} \subset V^0$ モ明ラカ。

ヨッテ $\mathfrak{J}_r, \mathfrak{K}$ ノ Haar-Mass ヲ m_1, m_2 トスレバ, $m = m_1 \times m_2$ デアルカラ $m(G^n) = m(V^n + \mathfrak{K}) m_1(V^n)$ $(n > n_0)$ カラ

$$\overline{\lim}\left\{\frac{1}{m(G^n)} m(G^n \sim (G^n + a))\right\}$$

$$= \overline{\lim}\left\{m_1\left(\frac{V^n}{n}\right)^{-1} m_1\left(\frac{V^n}{n} \sim \left(\frac{V^n}{n} + \frac{a}{n}\right)\right)\right\}$$

$$\leq \overline{\lim}\left\{m_1(V^0_\delta)^{-1}\left[m_1\left(V^0 \cup \left(V^0 + \frac{a}{n}\right)\right) - m_1\left(V^0_\delta \frown \left(V^0_\delta + \frac{a}{n}\right)\right)\right]\right\}^*$$

一方 $\lim m_1\left(V^0 \cup \left(V^0 + \frac{a}{n}\right)\right) = m_1(V^0)$ 等カラ

$^* \leqq m_1(V^0_\delta)\{m_1(V^0) - m_1(V^0_\delta)\}$ トナル。コヽデ $\delta \to 0$ トスレバコノ値ハ何程デモ小サクナル。即チ (17) ガ成立スル。——

(注意) E_n ハ $E_1 \subset E_2 \subset \ldots\ldots$, $\lim E_n = \mathfrak{G}$ トイフ丈ノ條件デハ (17) ハ必ズシモ成立シナイ。カヽル反例ヲ容易ニ作ルコトガ出来ル。

$\boxed{\text{定理17}}$ $\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt, m ガ Haar ノ Mass, $\mathfrak{G} = \sum_1^\infty A_n$, $m(A_n) < \infty$ ト

アラハサレルナラバ，適當ナ $\{E_n\}$ ヲトレバ (17) ガ成立スル。

(證) Pontrjagin-Kampen ノ Struktursatz カラ

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}_r + \mathfrak{H},\ \mathfrak{H}/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{D},\ \mathfrak{K}: \text{bikompakt},$$
$$\mathfrak{D}: \text{diskret}$$

ト直和ニ分解サレル。$\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{H}$ ノ Haar-Mass ヲ夫々 m_1, m_2 トスル。

今 $E_n^{(1)} \subset \mathfrak{T}_r$, $E_n^{(2)} \subset \mathfrak{H}$ ニ對シテ (17) ガ夫々 $\mathfrak{T}_r$ 及 $\mathfrak{H}$ ノ中デ成立スレバ，

$E_n = E_n^{(1)} \times E_n^{(2)}$ トスレバ $m = m_1 \times m_2$ ヨリ (17) ガ $\mathfrak{G}$ デ成立スル。

$\mathfrak{T}_r$ ノ中デカヽル $E_n^{(1)}$ ノトレルコトハ明カデアル。次ニ $\mathfrak{H} = \sum_1^\infty A_n'$, $m_2(A_n) < \infty$ トアラハサレルコトヽ，Haar-Mass ノ性質カラ $\mathfrak{D}$ ハ高々可算箇ノ元シカ含マナイ。

ヨッテ $E_n^{(2)}$ ヲ mod $\mathfrak{K}$ ノ Restklasse ヨリナル集合ヲ考ヘレバ，$\mathfrak{D}$ デ (17) ヲ成立セシナル $E_n^{(2)}$ ヲ作レバヨイ。$\mathfrak{D}$ ノ中デ Ordnung ガ有限ナ元ノ全体ヲ $\mathfrak{E}$ トスレバ，$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{R}$，トアルスベテノ元ガ Ordnung ∞ ナル群 $\mathfrak{R}$ トノ直和トシテアラハサレル。故ニ又 $\mathfrak{E}$ + $\mathfrak{R}$ ト別々ニ考ヘレバ十分デアル。

$\mathfrak{E} = \{x_1, x_2, \text{----}\}$ トスレバ，E_n ヲ $x_1, \text{----}, x_n$ ヨリ erzeugen サレル $\mathfrak{E}$ ノ Untergruppe トスレ

バ，E_nハ endliche Gruppe ナル故 Mass ハ有限デ，コレガ(17)ヲ満足スル。

$\mathfrak{A}$ ハソノ Erzeugende ヲ $\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ トスル。$\mathfrak{A}$ ノ元ハ一般ニ $a_1x_1+\cdots\cdots+a_nx_n$ （a_i ハ整数）ト表ハサレル。ヨッテ

$$E_n=(a_1x_1+\cdots\cdots+a_nx_n;\ i-n-1\leqq a_i\leqq n+1-i,\quad i=1,\cdots\cdots,n)$$

トスレバ，(17) ヲ満足スルコトガワカル。以上合セテ (17) ヲ満足スルヤウナ $E_n\subset\mathfrak{g}$ ヲモトメルコトガ出来タコトニナル。 q.e.d.